

ملاحظات:

1- يوجد توابع تأخذ متحول واحد (بمسقط واحد) مثل المقلوب $x \longmapsto x^{-1}$ وأخرى تأخذ متحولين مجموع ويمكن أن توجد توابع تأخذ أكثر من متحولين .

سنعتبر أي دالة أو تابع f في لغة الدرجة الأولى يأخذ عدد منتهي من المتحولات ندعوه arity نرمز له بـ n_f
و كل دالة بمتحول واحد ندعوها unary وكل دالة بمتحولين ندعوها binary وكل دالة بثلاثة ternary وهكذا ....
وفي بعض الأحيان يفضل أن نستخدم معاملات للتعبير عن دالة ما فمثلاً نستخدم $(a+b)$ بدلاً من $+(a,b)$ ونقوم بحذف الأقواس لتصبح $a+b$ إذا لم يكن هناك مجال للالتباس

2- كل ما ذكر عن التوابع ينطبق على العلاقات.

3- سنعتبر رمزاً خاصاً $\simeq$ (وسنرمز له تجاوزاً بـ $=$) ندعوه رمز المساواة موجود في كل لغة من الدرجة الأولى تمتلك علاقة ثنائية R_2 ما لم يذكر خلاف ذلك .

مثال على لغة من الدرجة الأولى :

$\mathcal{L} = \{R, c, f, g, h\}$ (تجاوزاً نكتب ذلك لأن اللغة $\mathcal{L}$ قد تحوي عناصر أخرى أي نقصد أن $\mathcal{L}$ تحوي العناصر $\{R, c, f, g, h\}$)

حيث h دالة ثنائية (بمسقطين) , و f, g دالتين أحاديتين , و c ثابت , R رمز لعلاقة ثنائية.

عندئذ : $\mathcal{C} = \{c\}$ و $\mathcal{R}_2 = \{R, \simeq\}$, $\mathcal{R}_n \neq \emptyset$ عندما $n \neq 2$

$\mathcal{F}_2 = \{h\}$ و $\mathcal{F}_1 = \{f, g\}$ و $\mathcal{F}_n \neq \emptyset$ عندما $n \neq 1,2$

سنأتي الآن لمفهوم المفردة

المفردة :

نطلق مفهوم المفردة term بلغة الدرجة الأولى على كل تعبير أو سلسلة من الرموز والذي يقوم بتوصيف كائن رياضي ما وفق القواعد التالية :

1- كل رمز ثابت : مثل..0,1 عبارة عن مفردة.

2- كل متحول x, y, v_0, v_1 ... هو عبارة عن مفردة .

3- إذا كان $F \in \mathcal{F}_n$ رمز لدالة , و $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$, n مفردة حيث $n = n_f$ عدد المساقط
عندئذٍ يكون $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ ونرمز لها اختصاراً بـ $f t_1 t_2 \dots t_n$ هي مفردة أيضاً.

4- أي مفردة في FOL هو عبارة عن تعبير (كلمة) ناتج عن تطبيق عددٍ منته من القواعد السابقة

بناءَ على ذلك يمكن بناء مجموعة المفردات بطريقة تعاودية

$$T_0 = \mathcal{C} \cup \mathcal{V}$$
$$T_{k+1} = T_k \cup \{f t_1 t_2 \dots t_n : f \in \mathcal{F}_n , t_i \in T_k (i = 1,2, \dots, n)\}$$



ارتفاع مفردة

تعريف : ارتفاع المفردة t من $T(\mathcal{L})$ هو أصغر عدد صحيح k يحقق $t \in T_k$

حيث $T(\mathcal{L})$ مجموعة كل مفردات اللغة والتي هي أصغر مجموعة جزئية من $W(\mathcal{L})$ (مجموعة أجزاء $\mathcal{L}$) تحقق القواعد السابقة .

ويمكن تمثيل أي مفردة من خلال شجرة كما مر معنا سابقاً , هناك كانت شجرة ثنائية أما هنا فليس من الضروري أن تكون شجرة ثنائية , لأنه في هذه الحالة عدد المفردات يعتمد على n_f ولكن يوجد هناك شجرة واحدة لكل مفردة .

ويكون حينها ارتفاع مفردة هو عدد الطوابق (المستو يات) مطروحاً منه واحد.

مثال 1 : لتكن اللغة $\mathcal{L} = \{c, f, g\}$ حيث g رمز لدالة ثلاثية و f لدالة أحادية و c رمز لثابت .

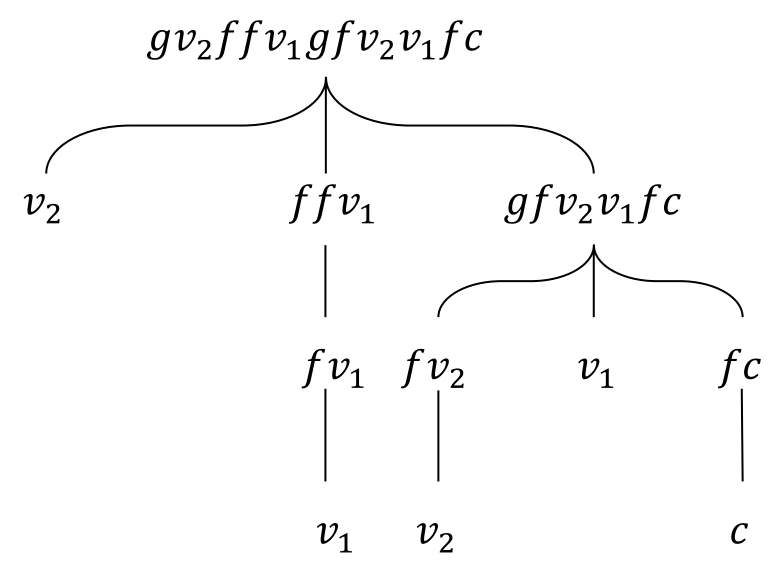
ولتكن الكلمة $w = gv_2ffv_1gfv_2v_1fc$ هل هي مفردة , وإذا كانت مفردة حدد ارتفاعها .

$$w = g\,\underbrace{v_2}\,\underbrace{f\,\underbrace{f\,\underbrace{v_1}}}\,\underbrace{g\,\underbrace{f\,\underbrace{v_2}}\,\underbrace{v_1}\,\underbrace{f\,\underbrace{c}}}$$

أقصد بالترميز $\underbrace{c}$ أي أن ما تحت هذا الخط هي مفردة , فمثلاً v_1 متحول فهو مفردة فكُتب $\underbrace{v_1}$, ولدينا f دالة أحادية فـ $f\,\underbrace{v_1}$ مفردة , وكُتبت $\underbrace{f\,\underbrace{v_1}}$, وبما أنها مفردة و f دالة أحادية فـ $\underbrace{f\,f\,\underbrace{v_1}}$ هي مفردة أيضاً .وهكذا......

إن كلاً من v_2, v_1, c مفردات و fc مفردة و fv_2 مفردة و g دالة ثلاثية فـ gfv_2v_1fc مفردة v_1مفردة و fv_1 و ffv_1 كذلك , إن gfv_2v_1fc مفردة و ffv_1 مفردة وv_2 مفردة لذا فإن $gv_2ffv_1gfv_2v_1fc$ مفردة لأنها دالة بمفردات أي أن w مفردة .

لنرسم الشجرة لهذه المفردة



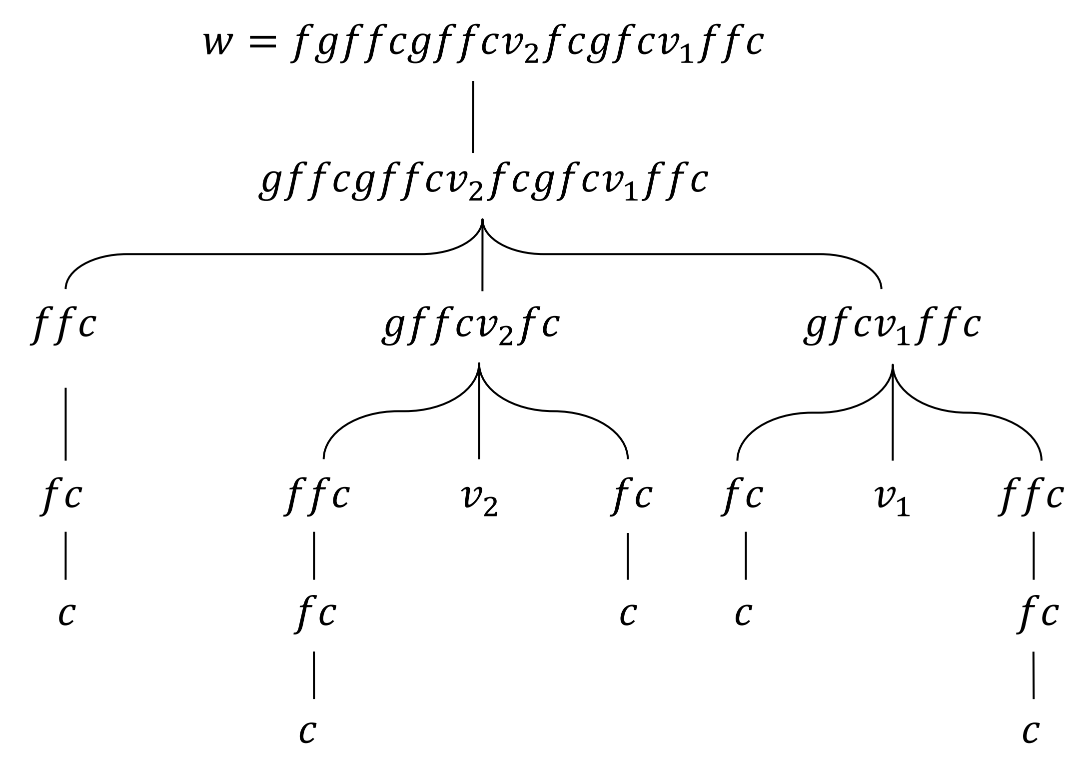
نلاحظ أننا استطعنا رسم الشجرة لهذه الكلمة فهي مفردة

إن ارتفاع هذه المفردة هو 3 أي هو عدد المستويات - والذي هنا أربعة - مطروحاً منه واحد.



مثال 2 :

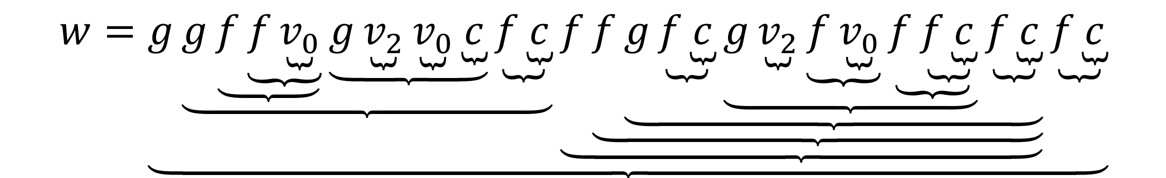
لتكن الكلمة $w = fgffcgffcv_2fcgfcv_1ffc$ في نفس اللغة السابقة , هل هي مفردة؟ , ارسم الشجرة لها.
وإذا كانت مفردة حدد ارتفاعها .
لنرسم الشجرة



نلاحظ أننا استطعنا رسم شجرة لهذه الكلمة ومنه هي مفردة , و هناك 6 طوابق (مستويات) لهذه الشجرة إذن ارتفاع المفردة الممثلة بهذه الشجرة هو $6 - 1 = 5$.

مثال 3 :

لتكن الكلمة $w = ggffv_0gv_2v_0cfcffgfcgv_2fv_0ffcfcfc$ في نفس اللغة المعرفة في المثال الأول
هل هي مفردة؟ ارسم الشجرة لها.
وإذا كانت مفردة حدد ارتفاعها .



كما فعلنا في شرح المثال الأول نجد أن w مفردة.
لنرسم الشجرة لها .



$$w = ggffv_0gv_2v_0cfcffgfcgv_2fv_0ffcfcfc$$

$gffv_0gv_2v_0cfc \quad ffgfcgv_2fv_0ffcfc \quad fc$

$ffv_0 \quad gv_2v_0c \quad fc \quad fgfcgv_2fv_0ffcfc \quad c$

$fv_0 \quad v_2 \quad v_0 \quad c \quad c \quad gfcgv_2fv_0ffcfc$

$v_0 \quad fc \quad gv_2fv_0ffc \quad fc$

$c \quad v_2 \quad fv_0 \quad ffc \quad c$

$v_0 \quad fc$

c

نلاحظ أن هناك ثمانية مستويات , إذن ارتفاع هذه المفردة هو 7 .

.: انتهت المحاضرة الحادية عشرة :.